

## 2020年中华人民共和国普通高等学校

## 联合招收华侨港澳台学生入学考试

## 数 学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 若集合  $A$  共有 5 个元素，则  $A$  的真子集的个数为  
A. 32                      B. 31                      C. 16                      D. 15
- 设函数  $f(x) = \ln(3x+a)$ ，若  $f'(0) = 1$ ，则  $a =$   
A. 3                      B.  $e$                       C.  $\ln 3$                       D. 1
- 设  $z = \frac{2(3+5i)}{(1-i)^2}$ ，则  $\bar{z} =$   
A.  $5-3i$                       B.  $-5-3i$                       C.  $5+3i$                       D.  $-5+3i$
- 设函数  $f(x) = x^2 + x + e$ ，若  $f(1)$ ， $f(2)$ ， $f(3)$  成等比数列，则  $c =$   
A. -6                      B. -2                      C. 2                      D. 6
- 离心率为  $\frac{1}{2}$  的椭圆的焦距为 2，则该椭圆的短轴长为  
A. 1                      B.  $\sqrt{3}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $4\sqrt{3}$
- 设双曲线  $x^2 - y^2 = 4$  的焦点为  $F_1$ ， $F_2$ ，点  $P$  在双曲线右支上，且  $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，则点  $P$  的横坐标为  
A.  $\sqrt{2}$                       B. 2                      C.  $\sqrt{6}$                       D. 6
- 从写有数字 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中任选 2 张，其上数字和为偶数的概率是  
A.  $\frac{1}{5}$                       B.  $\frac{3}{10}$                       C.  $\frac{2}{5}$                       D.  $\frac{3}{5}$
- 已知正三棱锥  $P-ABC$ ， $AB=2$ ， $PA=\sqrt{3}$ ， $D$  为  $PC$  中点，则三棱锥  $D-ABC$  的体积为  
A.  $\frac{\sqrt{5}}{6}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{6}$

9. 若  $a+b+c=4$ ,  $3a+2b-c=0$ , 则  $ab$  的最大值为

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 函数  $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$  的单调递增区间是

- A.  $(0,1)$                       B.  $(\frac{1}{e},+\infty)$                       C.  $(0,e)$                       D.  $(1,+\infty)$

11. 已知函数  $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x$ , 则  $f(x)$  的最小值为

- A. 0                      B. -1                      C.  $-\sqrt{3}$                       D. -2

12. 设点  $P_1, P_2, P_3$  在  $\odot O$  上, 若  $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0}$ , 则  $\angle P_1P_2P_3=$

- A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $90^\circ$

二、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

13. 不等式组  $\begin{cases} x^2-2x-3>0, \\ -x^2-3x+4\geq 0 \end{cases}$  的解集为\_\_\_\_\_.

14.  $(x-3)(x-3^2)(x-3^3)(x-3^4)$  的展开式中  $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

15. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$ ,  $f(2)=1$ , 则  $f(20)=$ \_\_\_\_\_.

16. 在空间直角坐标系中, 已知点  $A(1,0,2)$ ,  $B(1,1,-1)$ , 则经过点  $A$  且与直线  $AB$  垂直的平面方程为\_\_\_\_\_.

17. 若多项式  $x^5+x^3+2x^2+a$  能被  $x^2+1$  整除, 则  $a=$ \_\_\_\_\_.

18. 已知双曲线  $x^2-y^2=m$  与椭圆  $2x^2+3y^2=m+1$  有相同的焦点, 则  $m=$ \_\_\_\_\_.

三、解答题: 本题共 4 小题, 每小题 15 分, 共 60 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (15 分)

设函数  $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$ .

(1) 求  $f(x)$  的定义域;

(2) 求  $f(x)$  的单调区间;

(3) 求  $f(x)$  在区间  $[1,5]$  的最大值和最小值.



20. (15分)

设 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$ , 内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 且 $a=7$ .

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C.$$

求 $A, b$ 和 $c$ .

21. (15分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n = 2a_n - n$ .

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{2i}} < \frac{1}{2}$ .

22. (15分)

经过点 $A(-2, 4)$ 且倾斜角为 $135^\circ$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 交于 $M$ ,

且 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{MN}$ ,  $\lambda > 0$ . 求 $p$ 和 $\lambda$ .